

Dr. Pok

ใส่ใจ ใกล้ชิด พิษิตจุดหมาย

E-mail: dr.pok@hotmail.com

Issue 04 – Feb 2011



## จดหมายจากน้องทราย

อย่างที่ Dr. Pok ได้เกริ่นในตอนต้นแล้วนะครับว่า น้องทราย เป็นหนึ่งในนักเรียนที่ได้อ่าน Newsletter ของ Dr. Pok และได้เขียนเล่าประสบการณ์มาให้ฟังครับ

### ข้อความใน E-mail ของน้องทราย:

สวัสดีค่ะ อาจารย์ Pok

หนูก็ไม่รู้จะเรียกอาจารย์ว่าอะไรเลยขอเรียกอาจารย์ว่าอาจารย์ละกันนะคะ หนูไม่เคยได้เรียนกับอาจารย์หรอกค่ะ แต่หนูเป็นนักเรียนที่โชคดีที่ได้มีโอกาสอ่าน Newsletter ของอาจารย์ หนูบอกเลยคะว่าสุดยอดมาก ก่อนอื่นหนูขอแนะนำตัวเองก่อนนะคะ หนูชื่อ ทราย ค่ะ เป็นนักเรียนชั้น ม. 6 ได้เริ่มสอบ CU-AAT มาหลายครั้ง ตั้งแต่ชั้น ม. 5 หนูไม่ได้เรียนโรงเรียน Inter นะคะ ทำให้อ่านโจทย์ข้อสอบได้ช้า ก่อนสอบ CU-AAT หนูได้เคยลองทำข้อสอบ SAT รู้สึกว่าง่ายมาก และหนูก็พอรู้ว่าข้อสอบ CU-AAT ในวิชาเลข ก็ง่ายมากๆ ง่ายจนหนูไม่รู้จะอ่านอะไรไปสอบได้แต่สมัคร และสอบไปเรื่อยๆ เกือบ 5 ครั้งได้มั้งคะ แต่สอบที่ไรคะแนนหนูก็ไม่เห็นจะดีขึ้นเลย ได้คะแนนเลขอยู่ประมาณ 450 คะแนน ต่ำสุดที่หนูเคยได้ ถึงขั้นเปลี่ยนเลยคือ 370 กว่า หนูก็หลอกตัวเองมาตลอดว่า อาจจะเป็นเพราะหนูอ่านภาษาอังกฤษไม่ออก แต่พอได้อ่าน Newsletter ของอาจารย์ ตั้งแต่ฉบับแรก หนูลองทำอย่างที่อาจารย์บอกคะ คือ ไม่ได้คำนวณแบบค่อย ๆ เพื่อให้ได้คำตอบเหมือนที่เคยทำมา แต่ในการเตรียมตัวครั้งนี้หนูพยายามทำความเข้าใจโจทย์และใช้เทคนิคที่อาจารย์บอก ทำให้หนูได้คำตอบเร็วขึ้น แถมยังลดความผิดพลาดจากการคำนวณอีก

สวัสดีครับน้องๆ เมื่อเดือนมกราคมที่ผ่านมาเราเพิ่งเฉลิมฉลองกับเทศกาลปีใหม่แบบฉบับสากล สำหรับเดือนกุมภาพันธ์นี้เราก็ได้มาร่วมเฉลิมฉลองปีใหม่กันอีกครั้งในแบบฉบับจีน แน่นอนครับกับเทศกาลตรุษจีน สำหรับน้องๆ ที่มีเชื้อสายจีน หรือไม่มีเชื้อสายจีนก็ตาม Dr. Pok ก็ขอกล่าว “ซินเจียยู่อี้ ซินนี้ฮวดไช้ สุขสันต์ วันตรุษจีนครับ” และ Dr. Pok ก็ขอให้น้องๆ ทุกคนที่กำลังเตรียมตัวกับการสอบไม่ว่าจะเป็น CU-AAT SAT IGCSE GED ACT รวมถึง PAT และ GAT และการสอบอื่นๆ ที่จะเกิดขึ้นในปีพุทธศักราช 2554 นี้ ขอให้น้องๆ ประสบความสำเร็จกันถ้วนหน้าครับ ในฉบับนี้ Dr. Pok ขอแสดงความยินดีและชื่นชมกับน้องทรายครับ น้องทรายเป็นหนึ่งในนักเรียนที่ได้อ่าน Newsletter ของ Dr. Pok โดยน้องทรายได้เขียนมาเล่าประสบการณ์การเตรียมตัวสอบให้ฟัง Dr. Pok เห็นว่ามีประโยชน์มากกับน้องๆ ทุกคน ดังนั้นใน Newsletter ฉบับนี้ Dr. Pok ก็ขออนุญาตนำข้อคิดดีๆ ของน้องทราย มาให้กำลังใจกับน้องๆ นะครับ



ด้วย และหนูพยายามฝึกทำโจทย์เลขที่เป็นภาษาอังกฤษ ไม่ว่าจะ เป็น SAT IGCSE หรือข้อสอบอื่นๆ ที่ใช้ภาษาอังกฤษ ตามที่อาจารย์แนะนำ ผลการสอบ CU-AAT เดือนธันวาคม ที่ผ่านมา หนูได้คะแนน CU-AAT ในส่วนของเลข สูงที่สุดในชีวิตเลยคะ ได้เกือบ 550 คะแนน หนูก็รู้สึกว่าจะมั่นใจคงไม่สูงสำหรับอาจารย์ แต่หนูภูมิใจคะ เสียหายที่หนูอยู่ ม. 6 แล้ว ถ้าหนูมีโอกาสอีกสักปีหนึ่งหนูคงได้คะแนนสูงกวานี้ และคงเข้าคณะที่หนูอยากเข้าได้

Dr. Pok ตอบน้องทราย

ครับผม Dr. Pok ขอชื่นชมน้องทรายกับคะแนน 550 ที่น้องทรายได้มาจากความพยายามของน้องจนได้คะแนนที่สูงขึ้น และขอขอบคุณน้องทรายที่ได้แบ่งปันประสบการณ์อันมีค่า Dr. Pok ดีใจที่ Newsletter ได้สร้างคุณค่าให้กับน้องทราย และหวังว่าน้องๆ ทุกคนคงได้รับประสบการณ์ที่ดีเหมือนกับน้องทรายทุกคนครับ

# ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequences)

น้องๆ คงจำได้นะครับว่า Newsletter ฉบับที่แล้วเรารู้จักกับลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequences) ที่ผลต่างของพจน์ติดกันมีค่าเท่ากัน เช่น ลำดับเลขคณิต ของ 5, 8, 11, 14 ... ทุกๆ พจน์ที่ติดกันมีค่าผลต่างเท่ากัน คือ 3 เป็นต้น

สำหรับ Newsletter ฉบับนี้น้องๆ จะได้รู้จักลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequences) โดยน้องๆ อาจจะเคยเห็นโจทย์ที่ว่า

Example 1: Find the general term (or  $n$ -th term) of the sequence: 3, 6, 12, 24...

Sequence ที่ให้มานี้ไม่ใช่ลำดับเลขคณิต หรือ Arithmetic sequence แน่แน่นอนเพราะผลต่างของพจน์ที่ติดกันมีค่าไม่เท่ากัน โดยผลต่างของพจน์ที่สองกับพจน์ที่หนึ่งคือ 3 ขณะที่ผลต่างของพจน์ที่สามกับพจน์ที่สองคือ 6 แต่น้องๆ เห็นคือผลหารของพจน์ติดกันมีค่าเท่ากัน กล่าวคือ ผลหารของพจน์ที่สองกับพจน์ที่หนึ่งคือ 2 และผลหารของพจน์ที่สามกับพจน์ที่สองก็เท่ากับ 2 โดยค่า

ของผลหารนี้ เราเรียกกันว่า อัตราส่วนร่วม หรือ common ratio ซึ่งเราใช้สัญลักษณ์  $r$

เหมือนเดิมครับ ถ้าน้องๆ เริ่มเรียนจากการท่องสูตรน้องๆ ก็คงจำได้ว่า  $n$ -th term สำหรับ Geometric Sequence คือ

$$a_n = a_1 r^{(n-1)}$$

โดย  $a_n$  คือ general term หรือ  $n$ -th term;  $a_1$  คือ ค่าของพจน์หรือ term ที่หนึ่ง (first term) และ  $r$  คือ อัตราส่วนร่วม (common ratio) ซึ่งใน Example 1 ค่าของ term ที่หนึ่ง หรือ  $a_1$  คือ 3 และอัตราส่วนร่วม หรือ  $r$  คือ 2 ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$a_n = 3 \times 2^{(n-1)}$$

และเราจัดรูปได้เป็น

$$a_n = \frac{3}{2} (2^n)$$

แต่ถ้าน้องๆ สังเกตดูจะพบว่าสำหรับโจทย์ข้อนี้ common ratio คือ 2 น้องๆ ก็อาจจะมองได้ทันทีว่า  $a_n$  ในเบื้องต้นน่าจะเท่ากับ  $2^n$  และน้องๆ ก็คงพอมองออกว่า Geometric sequence จริงๆ ก็คือ Exponential Function นั่นเอง ขั้นตอนไปน้องลองแทนว่า  $n = 1$  เราจะได้ว่า  $a_1 = 2$  แต่โจทย์กำหนดมาว่าค่าของ term ที่หนึ่ง หรือ  $a_1$  เท่ากับ 3 ดังนั้น  $n$ -th term หรือ  $a_n$  ที่น้องได้มาว่าเท่ากับ  $2^n$  ในเบื้องต้น ต้องถูกคูณด้วย  $\frac{3}{2}$  เพื่อให้จะได้ค่า  $a_1$  เท่ากับ 3 เราจึงได้ว่า  $a_n$  ที่ถูกต้องคือ  $a_n = \frac{3}{2} (2^n)$

Example 2: Find the general term of the sequence: 8, 32, 128, 512...

เหมือนเดิมครับ ก่อนอื่นน้องๆ ต้องรู้ว่าลำดับดังกล่าวเป็น Geometric sequence ที่มี common ratio ( $r$ ) คือ 4 ดังนั้น จะได้ว่า  $a_n$  ในเบื้องต้นต้องเท่ากับ  $4^n$  แต่เมื่อแทน  $n = 1$  จะได้ว่า  $a_1$  เบื้องต้นเป็น 4 แต่น้องๆ ต้องการ  $a_1 = 8$  ดังนั้นน้องๆ ต้องเอา 2 เข้าไปคูณในค่า  $a_n$  ในเบื้องต้นที่น้องๆ หามาได้เท่ากับ  $4^n$  ซึ่งน้องๆ จะได้ว่า  $a_n$  ที่ถูกต้องคือ  $a_n = 2(4^n)$

**Example 3:** Find the general term of the sequence: 2401, 343, 49 ...

เช่นเดิมครับ หลังจากทีื่อนี้ทราบว่า เป็น Geometric sequence แต่ทีื่อนี้ๆ ต้องระวังนะครับ ให้เอาพจน์ที่สองหารพจน์ทีื่อนี้จะรับ ซึ่งจะทำให้ค่า common ratio ( $r$ ) คือ  $\frac{1}{7}$  และจะได้  $a_n$  เบื้องต้นเท่ากับ  $(\frac{1}{7})^n$  แต่เมื่อแทน  $n = 1$  จะได้ว่า  $a_1 = \frac{1}{7}$  ดังนั้นถ้าเราต้องการค่าพจน์แรกเท่ากับ 2401 ทีื่อนี้ๆ ต้องคูณในค่า  $a_n$  ในเบื้องต้นทีื่อนี้ๆ หามาได้ด้วยค่า 16,807 เพื่อที่จะทำให้ค่า  $a_1 = 2401$  ซึ่งเราจะได้ว่า  $a_n$  ทีื่อนี้ๆ จะต้องเท่ากับ  $16,807 (\frac{1}{7})^n$

หากทีื่อนี้ๆ สังเกตให้ทีื่อนี้ๆ **Example 2** เป็น Exponential function แบบ increasing function (ฟังก์ชันเพิ่ม) กล่าวคือเมื่อ  $n$  เพิ่มขึ้นค่าของ  $a_n$  ก็จะเพิ่มขึ้นไปด้วย ในขณะที่ **Example 3** เป็น Exponential function แบบ decreasing function (ฟังก์ชันลด) กล่าวคือเมื่อ  $n$  เพิ่มขึ้นค่าของ  $a_n$  ก็จะลดลง ซึ่งหากทีื่อนี้ๆ เข้าใจจะพบว่าสาเหตุทีื่อนี้ **Example 2** เป็น increasing function เพราะ common ratio มีค่ามากกว่า 1 และ **Example 3** เป็น decreasing function เพราะ common ratio มีค่าน้อยกว่า 1 แต่อย่าลืมนะครับต้องมากกว่า 0 ด้วย ตามหลักการของ Exponential function

เห็นไหมครับตอนนี้ทีื่อนี้ๆ ก็มีความรู้เพิ่มอีกทีื่อนี้ๆ อย่างแล้ว โดยทีื่อนี้ๆ ไม่ต้องอาศัยการท่องสูตรเลยครับ

คราวนี้ทีื่อนี้ๆ มาดูข้อสอบ SAT กันครับ

**Example 4:** In sequence S, the 3rd term is 12, the 1st term is three times the 2nd term, and the 2nd term is three times the 3rd. What is the 1st term in sequence S?

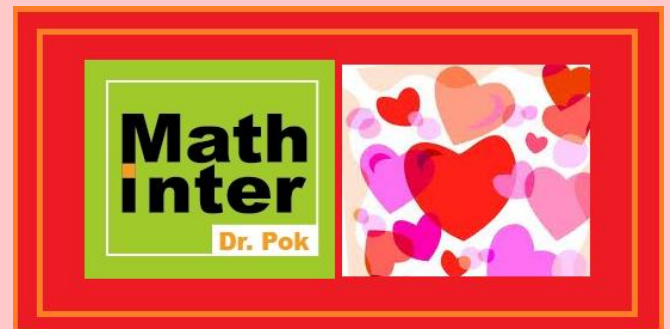
(A) 0 (B)  $\frac{1}{3}$  (C) 1 (D) 4 (E) 108

จากโจทย์ข้อนี้ทีื่อนี้ๆ จะรู้ทีื่อนี้ๆ ว่าเป็น Geometric Sequence โดยมี common ratio เท่ากับ  $\frac{1}{3}$  ซึ่งทีื่อนี้ๆ อาจจะตัดตัวเลือกบางข้อได้ก่อนเลย เช่น คำตอบไม่มีทางเป็น 0 เพราะถ้าเป็น 0 ไม่สามารถทำให้เกิด common ratio ได้เมื่อค่าของพจน์ทีื่อนี้ๆ เป็น 0 กลายเป็นตัวหาร หรือ denominator เวลาทีื่อนี้ๆ เราหา common ratio

นอกจากนี้ทีื่อนี้ๆ ยังทราบว่าค่า common ratio น้อยกว่าหนึ่ง ซึ่งเมื่อมองไปที่ Exponential function ทีื่อนี้ๆ จะทราบว่า เป็นฟังก์ชันลด หรือ Decreasing function ดังนั้นค่าของพจน์แรกต้องมากกว่า 1 แน่แน่นอน ดังนั้นจึงมีคำตอบเดียวทีื่อนี้ๆ เลือกได้คือข้อ E ได้ทันที

แต่ในกรณีทีื่อนี้ๆ ไม่มีตัวเลือกให้ทีื่อนี้ๆ ถ้าทีื่อนี้ๆ ต้องการทราบ  $a_n$  ก็ไม่ใช่เรื่องยากเพราะ  $a_n$  ในเบื้องต้นจะเท่ากับ  $(\frac{1}{3})^n$  แต่ตอนนี้ทีื่อนี้ๆ ทราบ  $a_3 = 12$  ทีื่อนี้ๆ ก็ลองแทน  $n = 3$  ซึ่งเราจะได้ว่าเท่ากับ  $\frac{1}{27}$  ดังนั้นเพื่อให้ได้ค่า 12 ทีื่อนี้ๆ ต้องคูณ  $a_n$  ด้วย 324 ดังนั้น  $a_n$  ทีื่อนี้ๆ จะต้องเท่ากับ  $324(\frac{1}{3})^n$  และโจทย์หา  $a_1$  ซึ่งก็จะเท่ากับ  $324(\frac{1}{3}) = 108$

เหมือนเดิมครับ Dr. Pok ต้องการจะบอกทีื่อนี้ๆ ว่า ทีื่อนี้ๆ ต้องมีความคิดหลากหลาย และเลือกใช้วิธีการทีื่อนี้ๆ ที่สั้นทีื่อนี้ๆ ในการหาคำตอบ เพื่อที่จะได้บรรลุ 800 คะแนนใน SAT หรือ CU-AAT ครับ



นี่ก็ใกล้จะถึงวันวาเลนไทน์วันแห่งความรักแล้ว ทีื่อนี้ๆ บางคนอาจจะกำลังรอคอยว่าจะได้ของขวัญอะไรจากคนรัก บางคนก็อาจจะได้รับเซอร์ไพรส์จากคนทีื่อนี้ๆ แอบชอบเรา Dr. Pok ขอให้ทีื่อนี้ๆ ทุกคนสุขสมหวังในวันวาเลนไทน์นะครับ